ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 2850-51.

Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie. I.

Von *Paul Harzer*.

Das Problem der drei Körper gestaltet sich für die Mondbewegung wesentlich anders, als für die Bewegung der Planeten, weil, im Gegensatz zu der letzteren, für die erstere eine Entwicklung von

$$\frac{m_1}{m'} r' \Omega = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos H + \alpha^2}} - \alpha \cos H$$

nach Kugelfunctionen zweckmässig ist, indem jede folgende Kugelfunction gegen die vorhergehende sehr klein wird. Dabei fällt aber die erste Kugelfunction in der Entwicklung des Wurzelausdrucks gegen den zweiten Theil von $\frac{m_1}{m'} r' \Omega$ fort und es bleibt als wesentlichster Theil die zweite Kugelfunction stehen, welche $\cos 0H$ und $\cos 2H$ enthält, nicht aber $\cos H$, welches letztere erst wieder in der dritten Kugelfunction vorkommt.

Bei der Planetenbewegung entstehen die wesentlichsten Theile der elementären Glieder aus den in $\cos H$ multiplicirten Gliedern der Störungsfunction und diese Theile sind, was die kurzperiodischen Glieder betrifft, von der ersten Ordnung in den Excentricitäten und Neigungen, was die langperiodischen betrifft, von der zweiten Ordnung in diesen Grössen. Durch den Wegfall der ersten Kugelfunction werden für die Mondbewegung die aus der zweiten Kugelfunction entstehenden Glieder, welche von der dritten, bezüglich der vierten Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen sind, je nachdem sie kurz- oder langperiodisch sind, von derselben Grössenordnung, wie die aus der dritten Kugelfunction entstehenden Glieder, welche, wie bei der Planetenbewegung, bezüglich von der ersten und zweiten Ordnung bleiben. Durch diese Verschiebung entstehen bei der Behandlung der Mondtheorie Probleme, die man bei der Planetenbewegung vermeiden kann.

Ueber eines dieser Probleme möchte ich hier eine Bemerkung mittheilen: Meine Untersuchungen über die Mondtheorie haben mir gezeigt, dass die Bestimmung der elementären Glieder beider Arten von der Integration einer Gleichung von dieser Form abhängt:

$$(1) \qquad \frac{dy}{d\xi} = -{}^1/_4 \varkappa^2 + \sum_p \alpha_p \cos(\sigma_p \xi + A_p) + y^2,$$

welche durch die Substitution $y = -\frac{d \log x}{d\xi}$ *) die folgende Gestalt gewinnt:

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{d\xi^2} - [{}^1/_4 \varkappa^2 - \sum_p \alpha_p \cos(\sigma_p \xi + A_p)]\, x = 0.$$

Dabei bedeutet die unabhängige Variabele ξ dieselbe Grösse, welche ich in meinem Aufsatze in Nr. 2826 dieser Zeitschrift benutzt habe, $\varkappa$ eine reelle Constante; die σ_p sind unter einander und von Null verschiedene reelle constante Coefficienten von der Ordnung der störenden Kräfte; im vorliegenden Falle gehören sie zwei Grössengruppen an, die durch die Zahlen $\frac{1}{10^2}$ und $\frac{1}{10^7}$ characterisirt werden. Die α_p sind constante Coefficienten von der Grössenordnung $\frac{1}{10^{11}}$ und schliesslich die A_p constante Winkel. Die Anzahl der Glieder hängt von der Anzahl der Planeten des Sonnensystems ab. Der Ausdruck $\frac{1}{l^2}\frac{dy}{d\xi}$, wobei l eine Constante von der Ordnung $\frac{1}{10^3}$ bedeutet, unterscheidet sich von dem um eine Constante verminderten Ausdrucke η^2, dessen Bedeutung ich wohl als bekannt voraussetzen darf, um eine trigonometrische Reihe von der Grössenordnung und Form des Ausdrucks

$${}^1/_4 \varkappa^2 - \sum_p \alpha_p \cos(\sigma_p \xi + A_p).$$

Ist y und damit η^2 ermittelt, so ist die Bestimmung der elementären Glieder beider Formen leicht. Die Ermittelung der wichtigsten Glieder der Mondbewegung hängt also von der Integration der Differentialgleichung (1) ab, für welche überdies noch die Bedingung gestellt wird, dass das Integral durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werde, was die Bedingung nach sich zieht, dass der constante Theil von y^2 gleich ${}^1/_4 \varkappa^2$ sei. Dieses Problem löse ich in der folgenden Weise.

Es sei:

$$(3) \qquad y = {}^1/_2 \varkappa \cdot \frac{1 - c e^{\varkappa \xi}}{1 + c e^{\varkappa \xi}},$$

so besteht für c die Differentialgleichung:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\frac{dc}{d\xi}}{(1 + c e^{\varkappa \xi})^2} = -\frac{1}{\varkappa} e^{-\varkappa \xi} g(\xi), \\ &g(\xi) = \sum_p \alpha_p \cos(\sigma_p \xi + A_p). \end{aligned} \right.$$

*) Herr Lindstedt hat bereits in seiner Abhandlung »Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie (Mém. acad. St. Pétersb. XXXI.4) diese Substitution gebraucht, durch welche die vorliegende Gleichung ein Specialfall der allgemeinen Gleichung $\frac{d^2x}{d\xi^2} + f(\xi) . x = 0$ wird, die für gewisse Specialwerthe der Function $f(x)$ eine sehr wichtige Rolle in der Störungstheorie spielt.

Diese Gleichung integrirt man durch Näherung in der folgenden Weise:

$$(5)\quad \begin{cases} c_0 = -\frac{1}{\varkappa}\int e^{-\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi, \\ c_1 = -\frac{1}{\varkappa}\int e^{-\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi - \frac{2}{\varkappa}\int c_0\, g(\xi)\,d\xi, \\ c_2 = -\frac{1}{\varkappa}\int e^{-\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi - \frac{2}{\varkappa}\int c_1\, g(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\varkappa}\int c_1^2 e^{\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{p+1} = -\frac{1}{\varkappa}\int e^{-\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi - \frac{2}{\varkappa}\int c_p\, g(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\varkappa}\int c_p^2 e^{\varkappa\xi} g(\xi)\,d\xi. \end{cases}$$

Die Integrationsconstante ist, um den Ausdruck $ce^{\varkappa\xi}$ in rein trigonometrischer Form zu erhalten, überall gleich Null zu setzen. Ausserdem sollen aber in den mit c^2 behafteten Theilen in jeder Näherung nur diejenigen Argumente berücksichtigt werden, die auch in den mit c behafteten Theilen vorkommen.

Substituirt man für $g(\xi)$ die trigonometrische Reihe und erinnert sich der Formel:

$$\int e^{-\varkappa\xi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\sigma_p\xi + A_p)'\,d\xi = -\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\sigma_p^2} e^{-\varkappa\xi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\sigma_p\xi + A_p) \pm \frac{\sigma_p}{\varkappa^2+\sigma_p^2} e^{-\varkappa\xi} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\sigma_p\xi + A_p),$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\sigma_p^2}} e^{-\varkappa\xi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} [\sigma_p\xi + (A_p)'],$$

$$\sqrt{\varkappa^2+\sigma_p^2}\cos(A_p)' = \varkappa\cos A_p - \sigma_p\sin A_p, \qquad \sqrt{\varkappa^2+\sigma_p^2}\sin(A_p)' = \varkappa\sin A_p + \sigma_p\cos A_p,$$

so wird beispielsweise:

$$(6)\quad \begin{cases} c_0 = \sum_p \frac{\alpha_p}{\varkappa^2+\sigma_p^2} e^{-\varkappa\xi}\cos(\sigma_p\xi + A_p) - \sum_p \frac{\sigma_p\alpha_p}{\varkappa(\varkappa^2+\sigma_p^2)} e^{-\varkappa\xi}\sin(\sigma_p\xi + A_p), \\ \quad = \sum_p \frac{\alpha_p}{\varkappa\sqrt{\varkappa^2+\sigma_p^2}} e^{-\varkappa\xi}\cos[\sigma_p\xi + (A_p)'], \\ c_1 = c_0 + \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q[\varkappa^2 - \sigma_p(\sigma_p+\sigma_q)]}{\varkappa^2(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p+\sigma_q)^2]} e^{-\varkappa\xi}\cos[(\sigma_p+\sigma_q)\xi + A_p + A_q] \\ \quad + \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q[\varkappa^2 - \sigma_p(\sigma_p-\sigma_q)]}{\varkappa^2(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p-\sigma_q)^2]} e^{-\varkappa\xi}\cos[(\sigma_p-\sigma_q)\xi + A_p - A_q] \\ \quad - \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q(2\sigma_p+\sigma_q)}{\varkappa^2(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p+\sigma_q)^2]} e^{-\varkappa\xi}\sin[(\sigma_p+\sigma_q)\xi + A_p + A_q] \\ \quad - \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q(2\sigma_p-\sigma_q)}{\varkappa(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p-\sigma_q)^2]} e^{-\varkappa\xi}\sin[(\sigma_p-\sigma_q)\xi + A_p - A_q], \\ \quad = c_0 + \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q}{\varkappa^2\sqrt{(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p+\sigma_q)^2]}} e^{-\varkappa\xi}\cos[(\sigma_p+\sigma_q)\xi + [(A_p)'+A_q]'] \\ \quad + \sum_p\sum_q \frac{\alpha_p\alpha_q}{\varkappa^2\sqrt{(\varkappa^2+\sigma_p^2)[\varkappa^2+(\sigma_p-\sigma_q)^2]}} e^{-\varkappa\xi}\cos[(\sigma_p-\sigma_q)\xi + [(A_p)'-A_q]'], \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ueber die Convergenz der Entwickelung bemerken wir das Folgende: Jeder Coefficient der erhaltenen Entwickelung für c ist kleiner als der Werth, welchen man erhält, wenn sämmtliche σ_p verschwinden. Convergirt also die Entwickelung für $\sigma_p = 0$ oder, was dasselbe sagt, für ein constantes $g(\xi)$, so convergirt die vorliegende Entwickelung um so mehr. Sei also, um die Convergenz für ein constantes $g(\xi)$ zu untersuchen,

$$g(\xi) = {}^1/_4\varkappa^2.\lambda$$

und λ eine Constante, so wird nach unserem Verfahren:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= {}^1/_4\lambda e^{-\varkappa\xi},\\
c_1 &= ({}^1/_4\lambda + {}^1/_8\lambda^2)e^{-\varkappa\xi},\\
c_2 &= ({}^1/_4\lambda + {}^1/_8\lambda^2 + {}^5/_{64}\lambda^3)e^{-\varkappa\xi},\\
&\vdots\\
c &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2p-1}{2^p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots p+1}\lambda^p e^{-\varkappa\xi}.
\end{aligned}
$$

Dieser Werth ist summirbar und gleich

$$c = \left[-1 + \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{1-\lambda})\right]e^{-\varkappa\xi},$$

wenn der absolute Betrag von λ stets kleiner als die Einheit ist. Dann wird auch der absolute Betrag von $ce^{\varkappa\xi}$ kleiner als die Einheit und der Ausdruck (3) für y ist nach den Potenzen von $ce^{\varkappa\xi}$ entwickelbar. Mindestens also so lange, als der absolute Betrag von $g(\xi)$ stets kleiner als ${}^1/_4\varkappa^2$ bleibt, ist unser Näherungsverfahren zur Bestimmung von y zulässig. Dass y^2 den constanten Theil ${}^1/_4\varkappa^2$ enthält, ist schon durch die Form der Gleichungen (3) und (4) bewirkt. — Ich bin geneigt anzunehmen, dass die Bedingung $[g(\xi)] < {}^1/_4\varkappa^2$ für die Mondbewegung erfüllt ist. Gewissheit darüber kann nur eine Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen ergeben.

Für y erhält man eine Reihe von dieser Form:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
y = {} & \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\cos[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots]\\
& + \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots b_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\sin[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots],
\end{aligned}
\right.
$$

wobei die α, β, γ, ... ganze positive oder negative Zahlen sind, die Null eingeschlossen. Sämmtliche a sind ungerade Functionen, sämmtliche b gerade Functionen in $\varkappa$. Da die vorgelegte Differentialgleichung sich nicht ändert, wenn man $\varkappa$ mit $-\varkappa$ vertauscht, so erfüllt auch diejenige Lösung y die vorgeschriebenen Bedingungen, welche man erhält, wenn man alle b ungeändert lässt, für alle a aber ihre entgegengesetzten Werthe substituirt. Daraus folgt, dass das Integral der Differentialgleichung (2), wenn man $a_{0,0,0,\ldots} = a_0$ setzt, sich in der folgenden Gestalt ergiebt:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
x = {} & c_1 e^{a_0\xi}\left\{
\begin{aligned}
&\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\cos[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots]\\
&+\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots d_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\sin[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots]
\end{aligned}\right\}\\
& + c_2 e^{-a_0\xi}\left\{
\begin{aligned}
&\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\cos[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots]\\
&-\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\ldots d_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}\sin[(\alpha\sigma_p + \beta\sigma_q + \gamma\sigma_r + \cdots)\xi + \alpha A_p + \beta A_q + \gamma A_r + \cdots]
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Die Constante a_0 hängt von den Grössen $\varkappa$, α_p und σ_p ab; der Anfang der Entwickelung ist:

$$a_0 = {}^1/_2\varkappa\left(1 - \sum\frac{\alpha_p^2}{\varkappa^2(\varkappa^2 + \sigma_p^2)} + \cdots\right).$$

Dieses allgemeine Resultat stimmt mit den bekannten Resultaten der Untersuchungen über den speciellen Fall

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + (n^2 - 2\beta\cos\xi)\,x = 0$$

überein, wenn man für n einen rein imaginären Werth ansetzt.

Die Formel (7) für x ist übrigens wahrscheinlich nicht an die für unser specielles Näherungsverfahren gefundene Bedingung gebunden.

Gotha 1888 Mai 1.
